Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MA1116. Matemáticas III.

GUIA 10: **Producto interno. Cojunto ortogonal**

1. Decir cuáles de las siguientes funciones reales son producto escalar:

   (a) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1$.

   (b) EN $\mathbb{R}^3$, $\langle (x_1, x_2, x_3); (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$.

   (c) En $\mathbf{P}_2$, $\langle p(x), q(x) \rangle = p'(0) q(0)$.

   (d) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1$.

   (e) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 - 2x_1 y_2 - x_2 y_1$.

   (f) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1$.

   (g) En $\mathbb{R}^2$, $\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1 + 2x_2 y_2^2 - x_1 y_2 - x_2 y_1$.

   (h) En $\mathbb{R}^3$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

   (i) En el espacio de las matrices $\mathcal{M}_{2\times 2}$, $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB)^T$.

2. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base del espacio $\mathbb{R}^n$. Demostrar que si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_i \rangle = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathbf{x} = 0$.

3. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \ldots, \mathbf{b}_n\}$ una base del espacio $\mathbb{R}^n$. Demostrar que si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_i \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{b}_i \rangle$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

4. Encuentre la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{a}$.

   (a) $\mathbf{u} = (6, 2)$, $\mathbf{a} = (3, -9)$

   (b) $\mathbf{u} = (-1, -2)$, $\mathbf{a} = (-2, 3)$

   (c) $\mathbf{u} = (3, 1, -7)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 5)$

   (d) $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (4, 3, 8)$.

5. En $\mathbf{P}_3$ se considera el producto escalar

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx.$$

   Calcular la norma de los siguientes polinomios:

   (a) 1.

   (b) x.

   (c) $x^2 - 1$.

   (d) $\frac{1}{3}(3x^2 - 1)$.

6. Comprobar, en cada caso, si los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales:

   (a) $\{(1, 1, 0), (2, -2, 1), (-1, 1, 4)\}$ de $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar canónico.

   (b) $\{(1, -2, 1), (3, 1, -1), (-2, 3, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\{(1,.1,2.0),(1,1,0,-1),(2,2,0,4)\}$ de $\mathbb{R}^4$, con el producto canónico.

7. En el espacio vectorial $\mathbf{P}_3$ se define los productos escalares:

   (a) $$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx,$$

   (b) $$\int_{-1}^{1} \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

   Estudiar con los dos productos anteriores si son ortogonales los conjuntos siguientes:

   (a) $\left\{1, \frac{1}{3}(3x^2-1), x^3\right\}$, (b) $\{x, x^2, 4x^3-3x\}$.

8. Encuentre el complemento ortogonal de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$, donde se considera el producto escalar canónico:

   (a) $H = \operatorname{gen}\{(1,2,0,-1),(2,-1,-3,2)\}$.

   (b) $W = \operatorname{gen}\{(1,1,0,0),(-1,2,1,2),(0,1,0,-1)\}$.

   (c) $H = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - 2x_3 + x_4 = 0\}$.

9. Sea $\mathbf{P}_3$, con el producto escalar

   $$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

   Obtener el complemento ortogonal de cada uno de los siguientes subespacios.

   (a) $H = \operatorname{gen}\{1, x^2+1\}$. (b) $W = \operatorname{gen}\{x^3-2\}$

10. Se considera el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^4$.

    (a) Aplicando el método de Gram-Schmidt, hallar una base ortogonal del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\mathbf{v}1 = (1,0,1,0)$, $\mathbf{v}2 = (1,1,1,0)$, $\mathbf{v}3 = (1,1,0,0)$.

    (b) Hallar la proyección del vector $\mathbf{z} = (2,0,-1,3)$ sobre $\operatorname{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

11. Sea $\mathbf{z} = (1,-1,2,-2)$ un vector de $\mathbb{R}^4$. Hallar su proyección sobre el subespacio $\operatorname{gen}\{(1,0,1,0),(1,-1,1,-1),(2,-1,2,-1),(1,1,1,1)\}$. Se considera el producto escalar canónico.

12. En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar Euclídeo. Use Gram-Schmidt para transformar la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ en una base ortonormal.

    (a) $\mathbf{u}_1 = (1,-3)$, $\mathbf{u}_2 = (2,2)$

    (b) $\mathbf{u}_1 = (1,0)$, $\mathbf{u}_2 = (3,-5)$.

13. En $\mathbb{R}^3$ con el producto $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. Use Gram-Schmidt para transformar $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ en una base ortonormal.